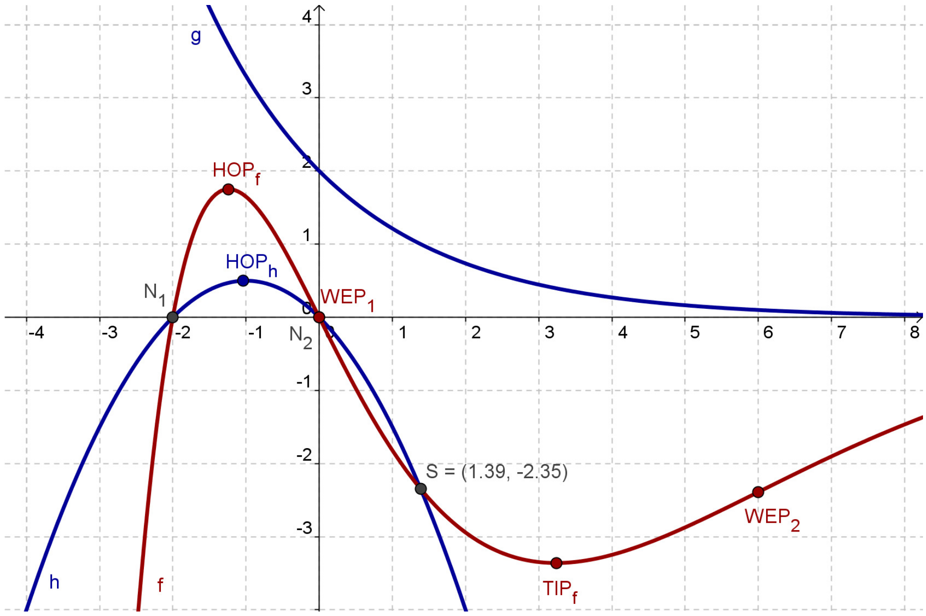
AP 1999 AII



1.2

$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$

$= -\frac{1}{2}x(x+2)$

$\Rightarrow x_1 = 0; \quad x_2 = -2$

Extremalpunkt ist der Scheitel:

$x_S = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = -1;$

$y_S = g(-1) = \frac{1}{2}$

• Also HOP$(-1 \mid \frac{1}{2})$

2.1 $h(x) = f(x)$

$\Rightarrow h(x) = h(x)\cdot g(x) \quad \Leftrightarrow \quad h(x)\cdot g(x) - h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad h(x)\cdot(g(x) - 1) = 0$

$h(x) = 0$ liefert die NST von Aufgabe 1.2 als gemeinsame Punkte

$g(x) - 1 = 0$ liefert den weiteren gemeinsamen Punkt S:

$2\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x = \ln(\frac{1}{2}) = \ln(2^{-1})$ also • $x_S = 2\ln(2) \approx 1{,}39$

2.2 $f(x) = -(x^2 + 2x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

• Für $x \to \infty$: $f(x) \to$ „$-\infty\cdot 0$“ also $f(x) = \frac{-(x^2+2x)}{e^{0{,}5x}} \to \text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"} \xrightarrow{\text{L.H.}} \frac{-(2x+2)}{0{,}5e^{0{,}5x}} \to \text{"}\frac{-\infty}{+\infty}\text{"}$

$\xrightarrow{\text{L.H.}} \frac{-2}{0{,}25e^{0{,}5x}} \to \text{"}\frac{-0}{+\infty}\text{"} \to 0^{(-)}$

• Für $x \to -\infty$: $f(x) \to$ „$-\infty\cdot\infty$“ also $f(x) \to -\infty$

2.3 $f'(x) = -(2x+2)\cdot e^{-\frac{1}{2}x} - (x^2+2x)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot(-\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x - 2\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_{1;2} = 1 \pm \sqrt{5}$

Weil $e^{-\frac{1}{2}x} > 0$, bestimmt das VZ von $-\frac{1}{2}x^2 - x - 2$ das VZ von $f'(x)$

• f ist sms für $x \in \,]-\infty;\, 1-\sqrt{5}\,]$

• f ist smf für $x \in [\,1-\sqrt{5}\,;\, 1+\sqrt{5}\,]$

• f ist sms für $x \in [\,1+\sqrt{5}\,;\infty[$

• HOP$(1-\sqrt{5} \mid f(1-\sqrt{5})) \approx$ HOP$(-1{,}24 \mid 1{,}75)$

• TIP$(1+\sqrt{5} \mid f(1+\sqrt{5})) \approx$ TIP$(3{,}24 \mid -3{,}36)$

2.4 $f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x - 2\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

$f''(x) = (x-1)\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - x - 2\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\left(-x^2 + 6x\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = -\frac{1}{4}x(x-6)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

Weil $\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x} > 0$, bestimmt das VZ von $-x^2 + 6x$ das VZ von $f''(x)$

$f''(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \;;\; x_2 = 6$, jeweils einfach mit VZW.

• $f(0) = 0 \Rightarrow W_1(0 \mid 0)$ • $f(6) = -\frac{48}{e^3} \Rightarrow W_2(6 \mid -\frac{48}{e^3})$

2.6 $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = (2x+b)\cdot e^{-\frac{1}{2}x} + \left(ax^2 + bx + c\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$F'(x) = \left(-\frac{1}{2}ax^2 + \left(2a - \frac{1}{2}b\right)x + b - \frac{1}{2}c\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = f(x)$

Koeffizientenvergleich liefert: $-\frac{1}{2}a = -1 \Leftrightarrow a = 2,\; 4 - \frac{1}{2}b = -2 \Leftrightarrow b = 12,\; 12 - \frac{1}{2}c = 0 \Leftrightarrow c = 24$

• $F(x) = \left(2x^2 + 12x + 24\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$